GRID

Intern faglig debat på Kunstakademiets Arkitektskole, Afd 6

Einig zu sein ist göttlich und gut; woher ist die Sucht denn
Unter den Menschen, daß nur Eines und Einer nur sei?
HÖLDERLIN

N° xx September 2008

Mangfoldigheder

Kasper Nefer Olsen

”1, 2, mange…” siger man på dansk, og det kan der selvfølgelig være noget om. At gå ud over 2, er at gå fra linie til plan, fra det private til det offentlige (*”Three is a crowd”*), fra marchens ensrettethed til valsens hvirvler. Med trekanten starter hele den uendelige serie af diskontinuerte figurer defineret ved hvert sit tal: jalousidrama, kvadrat, kvartet, pentagram, terning, uge, fodboldhold, tolvtonerække, måned, roulette, år…

Men det er måske alligevel at gå lidt for hurtigt frem. For mellem 0 og 1 ligger allerede uendeligheden. Lad f (x) = x/(1-x) over intervallet [0,1[, og f vil gå fra f (0) = 0 over f (½) = 1 mod uendeligt, efterhånden som x nærmer sig 1. Der er med andre ord ”tal nok” mellem 0 og 1 til at ”dække” uendeligheden.

Vi siger derfor hellere: ”0, 1, uendeligt mange…”. Den græske matematiker Euklid udtalte en mærkelig sætning; han sagde: ”Alle tal er én”. Det skyldes imidlertid netop at han tænkte tallene som figurer, hvis mangfoldighed samles til en enhed af deres tal: der er vældigt mange trekanter, men kun ét ”3” som definerer dem alle som trekanter. Derimod faldt det ikke grækeren ind at betragte ”ingenting” eller ”uendeligt mange” som tal: dertil svarer jo ingen figurer. Ganske vist foregreb filosoffen Zenon både differentialregningen og relativitetsteorien i sine fire såkaldte ”paradoxer”, hvoraf det kendteste er det om Akhilles og skildpadden, men det enkleste det der siger at for at komme fra A til B, må jeg først gå halvvejen, derpå halvvejen af den resterende halvvej, og så fremdeles, således at det vil kræve uendeligt lang tid at nå frem til B. Men det er ikke sikkert at Zenon selv helt forstod hvad det var, han havde fat i, og man fornemmer at han mest fremførte sine paradoxer for at ærgre de andre.

Euklid kendte således kun én slags tal; mens vi kender tre: 0, 1, og ∞, idet vi har accepteret punktet som en figur og universet som en faktisk uendelighed. For os er, i en vis forstand, alle tal 0 (både to- og titalssystemet har 0 som det afgørende element, og moderne talteori definerer 1 ud fra en betragtning af ”den tomme mængde” som unik). Vi driver dette så vidt som til at betragte en figur som en ”uendelig mangfoldighed” af punkter. Det er naturligvis lidt af en tilsnigelse: Aristoteles ville indvende at det kan da godt være at en figur kan deles i det uendelige; men det er jo ikke det samme som at den *er* delt i det uendelige. Figuren ”består” ikke af punkter; den består tværtimod i kraft af sin udstrækning, sin *kontinuitet,* dvs den omstændighed at et punkt aldrig kommer alene, men har en lille ”omegn” af linie eller flade eller rum omkring sig. Ingen figur kan være sin egen baggrund, og punktet kan derfor kun være figur på baggrund af en udstrækning.

Man kan imidlertid ”trylle” lidt med disse ting, og få noget frem som er meget tæt på at være en mangfoldighed af ”rene” punkter.

Lad os betragte et liniestykke udmålt af intervallet]0,1[, lad os dele det i tre lige store stykker, og lad os fjerne det midterste. Derved har vi naturligvis reduceret figurens udstrækning med en tredjedel, idet vi samtidig har udhævet to punkter (svarende til tallene 1/3 og 2/3) som grænsepunkter mod det mellemliggende tomrum. Vi gentager nu operationen, idet vi fjerner midterste tredjedel af de to resterende stykker; derved reducerer vi figuren med yderligere 2/9, og udhæver samtidig yderligere 4 grænsepunkter. Det er klart at fortsætter vi denne operation i det uendelige, vil al udstrækning forsvinde, men til gengæld vil der være fremstået et uendeligt antal grænsepunkter – som ”ingenting” begrænser (i matematikken er denne konstruktion kendt som ”Cantors støv”). Aristoteles har vel ret i at sige at det ville være mærkeligt at betragte denne figur som ”indeholdt” i liniestykket fra starten: den er jo netop udstrækningens fuldstændige modsætning og negation; men på den anden side må vi anerkende at den fremkomne ”sky” af isolerede punkter udgør en figur – vi kunne kalde den: *fragmentationens* figur – i sin egen ret. I sin analyse af Borrominis *San Carlo* sammenligner Claus Peder Pedersen fragmentationsgeometrier af denne type med barokkens strategier for indlejring af ”uendelighed” i begrænsede rum. I en vis forstand falder figuren faktisk her sammen med sin baggrund – samtidig med at den udskiller sig radikalt fra den: det er ”de samme” punkter, men to helt forskellige topologier.

Det begrænsede rum har således ubegrænsede muligheder. Hvis den klassiske figur er en bevægelse der er faldet til ro, er den moderne figur omvendt en bevægelse der blot endnu ikke er begyndt. Enhver linie dirrer, som funktion af uendeligt mange parametre; den rette linie er blot den hvor alle kontroller er sat på 0. Når denne dirren bliver til bevægelse, udskiller visse punkter sig, forbigående eller blivende, som bærere af bevægelsens konturer, fx de punkter hvor slangen snor sig; men det er *hele* slangen der snor sig, og tænker man sig hele dens udstrækning opløst i punkter, vil de alle bære en orientering i forhold til deres nærmeste omgivelser, som præcist definerer deres plads og rolle i helheden, og som tilsammen definerer helhedens bevægelse. Mangfoldigheden (mængden) af disse atomare orienteringer definerer hvad der i matematikken kaldes et *vektorfelt;* beskrivelsen eller forståelsen af en figur omfatter således ikke blot det rum, der definerer figuren som en mængde af punkter, men også det rum ”omkring” figuren der defineres af samtlige punkters orientering. Et vektorfelt kan være *homogent,* dvs at alle punkter har præcist den samme orientering i forhold til omgivelserne (det gælder fx for en cirkel), eller det kan være karakteriseret ved visse diskontinuiteter – som i en trekant hvor vektorfeltet ”knækker” tre gange, eller som i fragmentationsmængden, som vi betragtede ovenfor, hvor vektorfeltet så at sige består af lutter knæk.

En figur kan ikke have et hvilket som helst vektorfelt. Cirklen (som er en sfære af dimension 1) kan rotere således at alle punkter flytter sig samtidig; men det kan en sfære af dimension 2 (en kugleskal) ikke. Himmelsfæren roterer omkring Nordstjernen, og der er altid et sted på Jorden hvor det ikke blæser: vindens vektorfelt kan ikke smyge sig omkring jordkuglen uden at der må være mindst ét punkt hvor de modsatrettede vektorer ophæver sig selv. Det kan vises matematisk at dette gælder for alle sfærer af ligetallig dimension; som et grænsetilfælde kunne man sige at punktet, som en sfære af dimension 0, ikke kan rotere uden samtidig at stå stille (dvs det kan ikke rotere).

Vi aner nu at det er existensen af et vektorfelt (snarere end den blotte rumlige sammenhæng) der egentlig definerer figuren. Organer er figurer som er helt og holdent bestemt af deres vektorfelter: mund, hånd, hjerte. Som stien der banes gennem landskabet simpelthen ved at nogen går der. Men en figur kan udmærket bestå af adskilte elementer: en knust vase, eller en pose maling splattet ud mod en mur, vil være gode exempler på *fragmentationsfigurer*, hvis identitet sikres af at hvert enkelt element stadig peger mod en helhed, som ikke længere findes på punktmængdeniveau, men er bevaret som en slags erindring i vektorfeltet. Der gives med andre ord en art komplementaritet mellem figurer der hænger sammen på punktmængdeniveau, men typisk har diskontinuerte vektorfelter (klassiske figurer som trekant eller terning), og figurer hvis sammenhæng er givet af et kontinuert vektorfelt, men hvor sammenhængen på punktmængdeniveau er mindre afgørende (”dynamiske former”, fragmentationsmængder). I naturen er det ofte et spørgsmål om skala: på det atomare niveau hersker de klassiske former, som definerer krystallerne i det faste stof: selv et vandmolekyle har en rigid struktur, som gør at vand kan krystallisere, endda i temmelig raffinerede former; på det molekylære niveau, derimod, hersker vektorfeltets differentiable kontinuitet, og vand i væskeform ophører sig i forbløffende grad som en illustration af avanceret matematisk topologi. Havets uendelige monotoni skyldes at hver bølge endnu engang løser den samme ligning som kun har én og samme løsning. En slags krystallisation i tid.

Mangfoldigheden er således altid fordoblet i sig selv: der er figur, og der er vektorfelt; men vektorfeltet er igen en figur, som har et nyt vektorfelt (ligesom enhver hastighed selv har en hastighed, den såkaldte acceleration), og så videre *ad infinitum.* At udfolde denne mangfoldighedens mangfoldighed, at følge figurens kraftlinier, om den så skal sprænges, er det der kaldes at tegne.

HYDRA 2006