GRID

Intern faglig debat på Kunstakademiets Arkitektskole, Afd 6

Einig zu sein ist göttlich und gut; woher ist die Sucht denn
Unter den Menschen, daß nur Eines und Einer nur sei?
HÖLDERLIN

N° 13 Januar 2000 (Særnummer i samarbejde med Pro2, KA)

De grundlæggende topologiske intuitioner hos Aristoteles (uddrag)

Der er i Aristoteles' værk et vældigt gab, en afgørende blind plet: der mangler et begreb om *rummet*, således som vi kender det siden Descartes gjorde os fortrolige med det under betegnelsen *udstrækning*. Og det på trods af at Platons begreb om en "beholder", χωρα, lå lige for hånden, til at udfylde denne funktion. Aristoteles har imidlertid med den mest indædte stædighed fortrængt ethvert begreb der, mere eller mindre nærliggende, kunne fremkalde forestillingen om en ren rumslighed. Årsagen er velkendt: hans metafysik, med dens forankring i substansen, bød at forstå udstrækningen som et prædikat til substansen (nemlig dens *topos*), og under ingen omstændigheder kunne substans, eller materie, være et prædikat til udstrækningen. På lige netop dette punkt - spørgsmålet hvorvidt den relative ontologiske forrang tilkommer rum-tiden, eller om den tilkommer de fysiske størrelser som findes i den, stof og stråling - har den moderne videnskab ikke nået nogen afgørelse. Ernst Mach lod, i begyndelsen af det 20 årh, de fysiske genstande gå forud for rummets geometri. Einstein - som ganske vist i sin ungdom var påvirket af Mach - nåede omvendt, på sine gamle dage, frem til at betragte stof og stråling som blot og bart "sygdomme" ved rum-tiden. Og i den aktuelle kvantemekanik kan man finde lige stærke argumenter for begge teser... Man ville ikke desto mindre, tror jeg, tage fejl hvis man betragtede Aristoteles som en fortaler for en relationel teori om rummet, af den art som Leibniz hævder i *Monadologien.* Ganske vist består, for Aristoteles, den sublunare verden af genstande (ουσιαι); men disse genstande er ikke "ontologiske atomer". De har en struktur bestående et substrat (υποκειμενον) og en form (ειδος). Ydermere er de eneste genstande blandt disse, som besidder en autonom og adskilt existens - de såkaldt "primære" genstande -, de som har et materielt substrat. Det er imidlertid vanskeligt at nægte materien prædikatet udstrækning: denne måtte tværtimod snarere siges at et "væsensprædikat" (κατ αυτο) ved den. Og faktisk indskærper Aristoteles os, i Bog 4 og 5 af *Fysikken* (222b2, 242b25), at enhver bevægelse (i den generelle betydning af interaktion, af kvalitativ eller kvantitativ formforandring [μεταβολη]) forudsætter en "kontakt" mellem det bevægende og det bevægede substrat. Men hvordan definere en kontakt mellem to substrater hvis de ikke befinder sig på et fælles sted som omfatter dem begge? For så vidt væren består i at virke eller udsættes for en virkning, indfører denne forudsætning om kontakt (αφη) mellem genstandenes substrater faktisk rumligheden som en nødvendig forudsætning i selve hjertet af Aristoteles' metafysik.

Aristoteles indrømmer utvivlsomt muligheden af en virkelig ubevægelighed (ενεργεια της ακινησιας). Men hvis dette gjaldt for alle de primære genstande (og da de sekundære genstande alle er ubevægelige), ville den aristoteliske verden ende i samme stagnerende tilstand som den ubevægelige sfære hos Parmenides - en lære som Stagiritten ikke forsømmer nogen lejlighed til at gøre sig lystig over. Nødvendigheden af at kunne definere kontakten mellem to genstande, forklarer hvorfor Filosoffen i sin teori må tillægge begrebet om det "omsluttende" (περιεχον) en central rolle. Og det er derved, rummet - som i første omgang blev fordrevet fra hans ontologi ved en metafysisk *ukaz* - med ét slag genindfinder sig.

Aristoteles' matematiske kundskaber har ofte givet anledning til ikke særligt rosende kommentarer (til forskel fra Platons, skønt dennes fortjenester inden for dette felt ikke er historisk indlysende). Det må indrømmes at Aristoteles efter alt at dømme havde meget ringe sans for tal, - hvilket imidlertid hænger sammen med at det kvantitatives kategori (ποσον) for ham var meget langt fra at kunne måle sig med det kvalitatives (ποιον) i betydning. (Desuden nærede han mistro til de "mystiske" talbetragtninger som var overleveret fra pythagoræerne gennem Platon). På den anden side var han, som medlem af Akademiet, ingen geometrisk ukyndig (αγεωμετρητος), og man finder ikke mindst i hans teori om regnbuen, i *Meteorologien*, ganske raffinerede geometriske betragtninger. Men heller ikke dette er det afgørende. Det afgørende er det faktum at Aristoteles var den første - og i århundreder, ja årtusinder endog den *eneste* - *tænker af kontinuet*.

Jeg håber i det følgende at kunne vise at Aristoteles besad en særdeles bemærkelsesværdig rumlig intuition. Men hvad mere er: at kontinuet spiller en central rolle i hele det aristoteliske system, hvad enten det drejer sig om logikken, metafysikken, eller biologien, - i en sådan grad at en manglende opmærksomhed over for visse af disse geometriske intuitioner, som understøtter hele lærebygningen, vil gøre det umuligt at fatte dennes enhed. Og disse intuitioner finder man ikke blot i teoriens explicitte teser og argumentationer: man finder dem fremfor alt i spredte "bisætninger", som kaster et strålende forklarelsens skær over hele værket.

Lad os først vende tilbage til Platons χωρα. Nyere kommentatorer fortæller os at χωρα oprindeligt betød "egn", et område som var beboeligt for mennesket, og således var meget langt fra at svare til vores "udstrækning". Det er muligt; men jeg finder det langt mere oplysende når Aristoteles hævder (209a11-12) at Platon i Timaios sætter χωρα lig med materie (υλη). I det omfang Aristoteles eliminerer rummet som vi kender det, må han kompensere for dette tab med en vrimmel af "materier". Enhver slags forandring (μεταβολη), enhver art (γενος) kræver en særlig materie. Artikulationen af disse materiers indbyrdes forhold og deres forhold til udstrækningen (stedet, for Aristoteles) stiller problemer som ikke diskuteres explicit - og som vi skal vende tilbage til. Men når man i tanken fratager den sanselige materie enhver sanselig kvalitet, fremstår en *materia prima* hvis eneste egenskab faktisk synes at være udstrækning. Man kunne anskueliggøre denne første materie som en bevægelig tredimensionel udstrakthed, defineret på en kontinuert flytning nær. Med moderne termer kunne man hævde at flytningerne af en sådan masse af primære materier ville være defineret - som var det en flydende masse - ved homeomorfismer; i dén forstand ville den "første materies" fysik falde sammen med hvad vi kalder *topologi.* Vi skal dog se at dette ikke er tilfældet, og at der, set fra virkningens synspunkt (εντελεχεια), er visse homeomorfismer som ikke er tilladte. Det skyldes at enhver primær genstand, og mere generelt ethvert "materielt legeme" (σωμα), for Aristoteles er på et sted, dvs kan tillægges et fast, omsluttende legeme som vil give den pågældende genstand hvad man med moderne termer kalder en "ortogonal lokalisering". Den første materie har således metriske egenskaber som den overtager fra det sted som indeholder den.

For at tydeliggøre dette punkt, må vi vende tilbage til Aristoteles' betragtninger over det uendelige (απειρον) (*Fysikken*, Bog 3). Aristoteles bemærker her (207b) at udsat for en "deling" (διαιρεσις), opfører de hele tals diskrete mængde og de kontinuerte størrelser sig forskelligt. Ethvert helt tal der udsættes for en uafsluttet følge af simple delinger (subtraktion af 1) vil ende med at udtømmes og blive til 0; hvorimod man fra en kontinuert størrelse kan afskære et uendeligt antal størrelser uden at den forsvinder. Denne elementære iagttagelse, som gør det muligt at svare på aporien om fodrappen Akhilleus, vil Aristoteles her udnytte "i modsat retning" (αϖτεστραμμενως) (206b27): med udgangspunkt i den oprindelige reststørrelse, tilføjes rækken af størrelser som blev afskåret fra den oprindelige helhed; man får da en tiltagende, uendelig række af størrelser, hvis forening vil udgøre en kontinuert størrelse som vil være begrænset af den oprindelige helheds "diameter". Gennem dette argument, som bygger på symmetrien af et udsnit i forhold til dets omgivelser, undgår Aristoteles at skulle udvikle teorien for konvergensen af en række $\Sigma_n u_n$, moderne udtrykt. Det er klart at denne fremstilling alene gælder størrelser af dimension 1 (intervaller af den rette linie); men der vil ikke være nogen vanskeligheder ved at udstrække den til at gælde et to- eller tredimensionalt legeme, med en tilstrækkelig glat rand.

I denne konstruktion når man imidlertid aldrig frem til den rand som begrænser den størrelse, der fremstår ved omvendt addition; og herved opstår nødvendigheden af at betragte "åbne" delmængder, i den moderne topologis forstand. Aristoteles accepterer en åben mængde, som substrat for den virkelige uendelighed, når blot denne åbne mængde har - med moderne termer - en rand i det "lokale kort" som definerer stedet. Naturligvis finder man ikke hos Aristoteles et adjektiv der svarer til det moderne "åben"; men jeg tror, man kan give ham æren for at være fuldstændig klar over dets betydning. Han afviser således, som noget noget uforeneligt med enhver intuition, en "virkeligt" [ενεργεια] existerende åben mængde uden rand. For ham vil de to intervaller på axen 0x: J = {x | 0 =< x < 1} og R+ = {x | 0 =< x}, som for os er homeomorfe, være ontologisk forskellige: J kan findes som del af substratet for en genstand (intervallet [0,1]); men R+, som ikke har en rand, kan ikke virkeligt existere. Matematisk udtrykt: for at en homeomorfisme h skal kunne afbilde J på R+, må kvotienten h(x+Δx)-h(x) / Δx ikke være begrænset af en konstant K (Lipschitz' konstant). Aristoteles' "første materie" har den egenskab at man hverken kan udstrække eller sammenpresse den ud over en vis proportion uden at den brydes (som et klæde der rives over, hvis det udsættes for en for stor strækkraft). (...)

De læsere som måtte tænke at jeg ved at tillægge Aristoteles den moderne topologis distinktion åben/lukket, udviser lovlig stor generøsitet, opfordres til at betragte afsnit III (207a,22-28), i særdeleshed linie 24, hvor der tales om et hele begrænset ikke i sig selv, men af en ydre grænse. Er dette ikke selve definitonen af en begrænset åben mængde? Og når Aristoteles, to linier længere fremme (27-28), siger at materien er en del af helheden, som bronzen er en del af statuen, sigter han ikke dermed til "hele" materien, men til statuens indre (komplementærmængden til overfladen); for sammesteds (26) siger han: materien har ingen form, mens statuen synligvis har en form.

Det er her, vi efter min mening møder en grundlæggende intuition hos Mesteren. Den kommer til udtryk i bisætningen 207a35. Det uendelige er omsluttet, som den indre (omsluttede) materie: *og det er formen der omslutter* (περιεχει δε το ειδος).

En vis afklaring af Aristoteles' terminologi er her påkrævet. Begrebet om "randen", som denne defineres fx i differentialtopologien ("cirklen er skivens rand") har ikke noget entydig modstykke på græsk, men kan oversættes ved (mindst) fire forskellige ord: εσχατον (sædvanligvis oversat ved "det yderste”), περιεχον (omslutning), περας (kant eller grænse), ορος (afgrænsning, afslutning...).

Dette sidste udtryk, ορος, optræder kun sjældent i *Fysikken*, og vil derfor ikke blive diskuteret yderligere her. Termen εσχατον er den der udviser størst semantisk stabilitet, og kan, tror jeg, oversættes pålideligt ved det moderne “berøringspunkt” (i topologiens tekniske forstand, naturligvis). Termen περας giver ingen særlige problemer: den betegner en grænse, men en grænse som ikke nødvendigvis nåes i alle punkter, ja i visse tilfælde ikke i et eneste. Derimod rejser περιεχον et delikat fortolkningsproblem: omslutningen må nødvendigvis “berøre” (ved kontakt) det omsluttede legeme; men den rører det ikke nødvendigvis på hele dets overflade, - se hertil diskussionen i afsnit IV (211a29-211b5): lædersækken omslutter vinen, som den indeholder, men berører den ikke på dens horisontale overflade hvor den har kontakt med luften. Det samme gælder tønden som indeholder vand. Et andet problem angår omslutningens tykkelse. Bisætningen ovenfor antyder kraftigt, ligesom 211b10-12, at omslutningen er i kontakt med praktisk talt hele det omsluttede legeme, *og at dens tykkelse er ubetydelig*. Dermed kommer sætningen 211b12 til at lyde: grænsen for grænsen er tom. Lukningen af lukningen er lukningen selv - hvilket er Kuratowskis axiom for den moderne topologi, fremført i begyndelsen af det 20 årh... Det er tilstrækkeligt her at antage at omslutningen af en åben mængde B er grænsen ^B \ B af det omsluttede legeme B (“Bemærk at randen for det indre af en mangfoldighed med kompakt rand, er dennes rand”). Den omstændighed at “omslutningen synes at være det samme som formen” (211b11), understøtter denne fortolkning.

Man må ikke glemme at det uendelige, for Aristoteles, har et “indre substrat”, nemlig det sanselige kontinuum: το δε καθ αυτο υποκειμενον το σψνεχες και αισθετον (208a). Men kan et sanseligt kontinuum opfattes som andet end en udstrakthed der er bærer af egenskaber? Vi føres dermed til at antage følgende ligninger:

Første materie	∨	Åben mængde	∨	Mulighed
Fuldstændig ousia	∨	Lukket mængde	∨	Virkelighed
Form	∨	Rand	∨	(aktualiserende kraft)

I denne forstand kan man sige at formen er materiens rand: det indre, den åbne mængde, er “mulighed”; med randen sættes virkeligheden som er mulighedens tagen-form. Hvilket kan opsummeres i formlen: *virkeligheden er mulighedens “rand”.*

Denne metafor er fuldt ud gyldig for en gasformig stofmasse: enhver gas tager som bekendt form efter den beholder hvori den er indeholdt. Sagen er mindre klar når det gælder en væske der, som vandet i tønden, til dels antager beholderens form, men bevarer en horisontal berøringsflade (i kontakt med luften) hvis niveau bestemmes af væskens mængde. Formen er her bestemt ved et potentiale $z = V(x,y)$, begrænset til en bestemt højde $z = h$ der afgøres af én enekelt parameter, nemlig mængden af væske.

Har vi at gøre med et fast legeme, er situationen en helt anden: det faste legeme har en form *ne varietur* (på en flytning nær). Dette er altså et tilfælde hvor formen er strengt determineret af materien, af en allerede given tilstand, en το τι ην ειναι, som Aristoteles siden kalder det - i anden sammenhæng. De levende væsener, som befinder sig et sted imellem krystallen og røgen (H Atlan), har en konsistens midt imellem det faste og det flydende. Deres form er afhængig af begge faktorer: konflikten med de ydre omgivelser (beholderen), og den “genetiske arv” (deres το τι ην ειναι). (...)

René Thom (1988) *(Oversat fra fransk af kno)*